第 2 讲　一维随机变量的概率分布

知识梳理

一　一维随机变量的概率分布

1.离散型：概率分布律

X 的概率分布律

$$\boxed{P(X=x_k)=p_k}$$

性质：$p_k \geq 0$ 且 $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = 1$

2.连续型：概率密度函数

概率密度函数

$$\boxed{F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t}$$

性质：$f(x)\geq 0$ 且 $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1}$

- 可计算：X 落在特定区间的概率

X 落在区间 (a,b) 的概率

$$\boxed{P(x_1<x<x_2)=\int_{x_1}^{x_2} f(t)\mathrm{d}t}$$

3.概率分布函数

概率分布函数

$$\boxed{F(x)=P(X\leq x)}$$

性质：$0\leq F(x)\leq 1$ 且 $F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$

- 对于离散型，$F(x)=\sum_{x_i\leq x} P(x=x_i)$，且 $F(x)$ 仅在 $x=x_i$ 处不连续
- 对于连续型，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$，$F(x)$ 处处连续，且在 $f(x)$ 的连续点 x 处，$\boxed{F'(x)=f(x)}$

二　一维随机变量的数字特征

1.数学期望 $E(X)$

离散型数学期望

$$\boxed{E(g(X))=\sum_{i=1}^{+\infty} g(x_i)p_i}$$

连续型数学期望

$$\boxed{E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x}$$

- $g(X)$ 为随机变量 X 的函数，包括 X 本身

2.方差

方差

$$\boxed{\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2}$$

题型解析

四　一维离散型随机变量分布求解

1.题型简述与解法

① **求一维离散型随机变量的分布律**

- 题干描述实际生活场景，往往结合全概率、贝叶斯的知识
- 主要流程：列出 X 的所有可能取值 → 计算每个取值的概率 → 列表

X	x_1	x_2	……	x_n
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	……	p_n

- 也有考过根据分布函数求分布律，此时注意分布函数中的"阶跃点" x_i，其阶跃值就是对应概率

② **根据分布律求事件概率**

- 枚举出所有满足条件的 x_i，将它们的概率相加（如果枚举项太多，不妨反求逆事件的概率）

③ **求期望、方差**

- 代入公式计算即可，求 $g(X)$ 的期望时最好在草稿纸上把 $g(X)$ 以及对应概率列出来，方便计算

2.历年考试典型例题

例 1　（15—16 秋冬）一学徒工在一台机床上加工 2 个零件，第 1 个零件合格的概率为 0.6；在第 1 个是合格品的条件下，第 2 个合格的概率为 0.8；在第 1 个不合格的条件下，第 2 个合格的概率是 0.5. X 表示合格零件数，求 X 的分布律.

解　因为一共加工 2 个零件，所以 X 的取值为 0，1，2

$X=0$ → 第 1 个零件不合格，第 2 个零件不合格，由条件概率：

$$P(X=0)=P(\text{第1次不合格,第2次不合格})=P(\text{第1次不合格})P(\text{第2次不合格}\mid\text{第1次不合格})$$
$$=(1-0.6)(1-0.5)=0.2$$

$X=2$ → 第 1 个零件合格，第 2 个零件合格，由条件概率：

$$P(X=2)=P(\text{第1次合格,第2次合格})=P(\text{第1次合格})P(\text{第2次合格}\mid\text{第1次合格})$$
$$=0.6\times0.8=0.48$$

可直接得到 $P(X=1)=1-0.2-0.48=0.32$，因此 X 的分布律如下：

i	0	1	2
$P(X=i)$	0.2	0.32	0.48

例 2　（20—21 秋冬）设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ 0.4, & -1\le x<0\\ 0.6, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge1\end{cases}$ 则 $P(X=0)=$________.

解　$x=0$ 处为阶跃点，$F(x)$ 由 0.4 阶跃至 0.6，因此 $P(X=0)=0.6-0.4=\boxed{0.2}$

五　一维连续型随机变量分布求解

1.题型简述与解法

① **已知密度函数或分布函数，求其中的未知常数**

- 密度函数：根据积分等于 1 解出
- 分布函数：根据 $F(x)$ 连续，在特定点（如分段函数点）求左右极限，解出

② **求事件概率和分布函数**

- 求事件概率将事件转换成 X 的取值范围，在对应的 x 区间上对密度函数积分或分布函数相减
- 求分布函数要分类讨论，确保 x 覆盖整个实数域，常用密度函数的分段点作为分类讨论的标准

③ **求期望、方差**

- 代入公式积分即可，常考幂函数的积分

2.历年考试典型例题

例 1　（15—16 **春夏　节选**）设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ c[(x+1)^2-1], & 0\le x<2 \\ 1, & x\ge 2 \end{cases}.$$

（1）求 c 的值；（2）求 $P(X>1)$ 的值.

解　（1）由于分布函数连续，因此在 $x=2$ 处，$\lim\limits_{x\to 2^-}F(x)=F(2)$，即 $8c=1$，解得 $\boxed{c=1/8}$

（2）$P(X>1)=1-P(X\le 1)=1-F(1)=1-\frac{1}{8}[2^2-1]=\boxed{5/8}$

例 2　（16—17 **秋冬　节选**）设 X 的密度函数 $f(x)=\begin{cases} x/4, & 0<x<2 \\ 1/4, & 2\le x<4 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，求 X 的分布函数 $F(x)$；

解　$f(x)$ 为分段函数，因此 $F(x)$ 要分类讨论（根据 $f(x)$ 的分段点，分类讨论的界限分别为 0、2、4）

- 当 $x<0$ 时，$F(x)=0$；当 $x\ge 4$ 时，$F(x)=1$；
- 当 $0\le x<2$ 时，$F(x)=\int_0^x \frac{t}{4}\mathrm{d}t=\frac{x^2}{8}$
- 当 $2\le x<4$ 时，$F(x)=\int_0^2 \frac{t}{4}\mathrm{d}t+\int_2^x \frac{1}{4}\mathrm{d}t=\frac{4}{8}+\frac{x-2}{4}=\frac{x}{4}$（千万不要忘了前面的积分!）
- 综上所述：

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x^2/8, & 0\le x<2\\ x/4, & 2\le x<4\\ 1, & x\ge 4\end{cases}$$

例 3 （**16—17 春夏 节选**）设 X 的密度函数 $f(x)=\begin{cases}cx, 0<x<2\\ 0, \quad 其他\end{cases}$，求：

（1）c 的值，$E(X)$，$D(X)$；

解 （1）$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 cx\mathrm{d}x=2c=1 \rightarrow \boxed{c=1/2}$

（2）$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^2\frac{1}{2}x^2\mathrm{d}x=\boxed{4/3}$

（3）$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2\frac{1}{2}x^3\mathrm{d}x=2$

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\boxed{2/9}$